Ultrametrische Räume von Zahlenfolgen

Teilnehmer:

Wilhelm Kielkopf	Herder-Oberschule, Berlin
Evgueni Kivman	Lloyd-Gymnasium, Bremerhaven
Orlando Marigliano	Albert-Einstein-Oberschule, Berlin
Simon Puchert	Carl-Zeiss-Gymnasium, Jena
Felix Thoma	Herder-Oberschule, Berlin
Simone Zahn	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Konrad Gröger	Humboldt-Universität zu Berlin

Die Gruppe hat sich zunächst den Begriff des ultrametrischen Raums erarbeitet und erste Beispiele von ultrametrischen Räumen kennen gelernt. Sie hat dann Sachverhalte behandelt, durch die sich ultrametrische Räume vor allgemeinen metrischen Räumen auszeichnen. Darunter fallen recht gewöhnungsbedürftige Aussagen:

- Kugeln mit gleichem Radius sind entweder gleich oder durchschnittsfremd.
- Jeder Punkt einer Kugel ist Mittelpunkt der Kugel.
- Alle Kugeln sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

Zur Illustration der allgemeinen Aussagen ist deren Bedeutung für ultrametrische Folgenräume untersucht worden.

Schwerpunkt der Arbeit der Gruppe war die Untersuchung von ultrametrischen Räumen, deren Elemente Folgen von (rationalen, reellen oder komplexen) Zahlen sind. In diesen Räumen kann in natürlicher Weise eine Addition und eine Multiplikation so definiert werden, dass beide Operationen bezüglich der Ultrametrik stetig sind. Die Gruppe hat gelernt, invertierbare Elemente und Primelemente dieser Folgenräume zu definieren und mit Hilfe der Metrik zu charakterisieren. Es ist deutlich geworden, dass in manchen Belangen ultrametrische Räume einfacher sind als allgemeine metrische Räume. Beispielsweise konvergiert eine Reihe in einem Raum von Zahlenfolgen genau dann, wenn ihre Glieder eine Nullfolge bilden. Schließlich hat die Gruppe gelernt, dass sich die Elemente eines Raums von Zahlenfolgen als Potenzreihen schreiben lassen. Das motiviert die Einführung weiterer Operationen in einem solchen Raum, nämlich der Differenziation und der Substitution. Es sind Regeln für die Ausführung dieser Operationen erarbeitet und Beispiele diskutiert worden.

Der Gruppe ist bei der Beschäftigung mit dem Thema bewusst geworden, dass der Begriff *Metrischer Raum* reichhaltiger ist, als man nach dem Kennenlernen der Standardbeispiele metrischer Räume erwartet.

1 Grundlagen

Metrische und ultrametrische Räume

Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to [0, \infty[$ heißt *Metrik auf* M, falls

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \tag{M1}$$

$$d(x,y) = d(y,x), \tag{M2}$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{M3}$$

für alle $x, y, z \in M$ erfüllt sind. Gilt sogar die schärfere Ungleichung

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}, \tag{M3$'$}$$

so heißt d *Ultrametrik auf* M. Das Paar (M, d) aus der Menge und der Abbildung heißt dann *metrischer* bzw. *ultrametrischer Raum.*

Beispiele für metrische und ultrametrische Räume

Beispiel 1. Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $d(x,y)$ der euklidische Abstand von x und y, d.h. für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist $d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Dann ist (M, d) ein metrischer Raum, denn die Bedingung (M1) ist trivial, die Beziehung $d(x,y) = d(y,x)$ folgt aus der Symmetrie der Funktionsgleichung und die Ungleichung $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ ist die gewöhnliche Dreiecksungleichung der Ebene.

Beispiel 2. Sei M die Menge der deutschen Städte/Gemeinden. Des Weiteren sei $d(x,x) = 0$ und sonst $d(x,y) = 1$, wenn x und y in demselben Landkreis liegen, ansonsten $d(x,y) = 2$, wenn x und y in demselben Bundesland liegen, und sonst $d(x,y) = 3$. Dann ist (M, d) ein ultrametrischer Raum. Die ersten beiden Bedingungen sind wieder trivial. Die dritte Bedingung folgt aus einer Fallunterscheidung: Im ersten Fall haben alle drei Städte untereinander den gleichen Abstand, dann folgt die Ungleichung. Im zweiten Fall gelte $d(x,y) < d(y,z)$. Das bedeutet, dass z außerhalb der kleinsten gemeinsamen Verwaltungseinheit von x und y liegt. Also sind alle Städte/Gemeinden dieser Verwaltungseinheit bezüglich z gleichberechtigt, insbesondere gilt dann $d(y,z) = d(x,z)$. Daraus folgt wieder die verschärfte Dreiecksungleichung (M3$'$).

Einige Eigenschaften von ultrametrischen Räumen

Sei (M, d) ein ultrametrischer Raum.

Satz 1. *Für alle* $x, y, z \in M$ *mit* $d(x,y) \leq d(y,z) \leq d(z,x)$ *gilt* $d(y,z) = d(z,x)$.

Beweis. Wir nehmen an, es sei $d(y,z) < d(z,x)$ (die andere Richtung ist nach Voraussetzung verboten), dann gilt aber

$$d(z,x) \le \max\{d(x,y), d(y,z)\} = d(y,z) < d(z,x).$$

Aus dem Widerspruch folgt, dass $d(y,z) = d(z,x)$ gelten muss. □

Definition. Für $x \in M,\ r \in\,]0,\infty[$ heißt die Menge

$$B_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$$

Kugel um x vom Radius r. Der Punkt x heißt dann *Mittelpunkt der Kugel $B_r(x)$*.

Satz 2. *Wenn zwei Kugeln den gleichen Radius haben und nicht disjunkt sind, sind sie gleich.*

Beweis. Man betrachte zwei nicht disjunkte Kugeln $B_r(x), B_r(y)$ mit $x, y \in M$. Nun gilt für irgendein $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$: $d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(y,z)\} < r$. Für alle $v \in B_r(x)$ gilt $d(y,v) \le \max\{d(x,y), d(x,v)\} < r$, woraus auch $v \in B_r(y)$ folgt und somit $B_r(x) \subseteq B_r(y)$. Wegen der Symmetrie folgt auch $B_r(y) \subseteq B_r(x)$. Das bedeutet somit $B_r(x) = B_r(y)$. □

Satz 3. *Die Menge M ist für jedes $r \in\,]0,\infty[$ eine Vereinigung aus paarweise disjunkten Kugeln mit dem Radius r.*

Beweis. Zunächst einmal ist M die Vereinigung aus allen möglichen Kugeln $B_r(x)$ mit $x \in M$ und festem Radius $r > 0$. Nun sind je zwei dieser Kugeln nach Satz 2 entweder disjunkt oder gleich. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 4. *Wenn $x \in B_r(y)$ gilt, ist x ebenfalls Mittelpunkt der Kugel $B_r(y)$, d.h. $B_r(x) = B_r(y)$*

Beweis. Das folgt aus Satz 2, weil $B_r(y)$ und $B_r(x)$ nicht disjunkt sind. □

Satz 5. *Seien $B_r(x)$ und $B_s(y)$ zwei nicht disjunkte Kugeln mit $s > r$. Dann ist $B_r(x) \subseteq B_s(y)$.*

Beweis. Für irgendein $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$ ist nach Satz 2 sowohl $B_r(x) = B_r(z)$ als auch $B_s(z) = B_s(y)$. Nach der Kugeldefinition gilt wegen $s > r$ die Beziehung $B_r(z) \subseteq B_s(z)$. Daraus folgt $B_r(x) \subseteq B_s(y)$. □

Definition. Eine Teilmenge E von M heißt *offen in* (M,d), wenn es für jedes $x \in E$ ein $r \in\,]0;\infty[$ gibt, sodass $B_r(x) \subseteq E$ gilt. Eine Teilmenge E von M heißt *abgeschlossen*, wenn $M \backslash E$ offen in (M,d) ist.

Satz 6. *Die Kugel $B_r(x)$ ist für alle $x \in M$ sowohl offen als auch abgeschlossen.*

Beweis. Für jedes y aus $B_r(x)$ ist nach Satz 4 $B_r(y) = B_r(x)$. Somit gibt es ein $r \in\,]0,\infty[$, sodass für jedes y aus $B_r(x)$ gilt: $B_r(y) \subseteq B_r(x)$. Damit ist $B_r(x)$ tatsächlich offen. Die Komplementärmenge $M \backslash B_r(x)$ ist nach Satz 3 Vereinigung von disjunkten Kugeln mit dem Radius r. Jedes $z \in M \backslash B_r(x)$ ist Mittelpunkt genau einer dieser Kugeln. Es lässt sich daher auch hier immer dieses $r \in]0, \infty[$ wählen und damit ist auch diese Menge offen. Somit ist $B_r(x)$ abgeschlossen. □

Definition. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0, x_1, \ldots \in M$ heißt *im Raum* (M, d) *konvergent gegen* $x^* \in M$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_n) = 0$$

ist. Gilt diese Beziehung, so heißt x^* *Grenzwert der Folge* (x_n) *im Raum* (M, d).

Satz 7. *Jede Folge* (x_n) *in* M *besitzt höchstens einen Grenzwert in* (M, d).

Beweis. Nehmen wir an, die Folge (x_n) habe zwei Grenzwerte a und b, für die $d(a, b) > 0$ ist. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(b, x_n) = 0.$$

Somit gibt es für jedes $\varepsilon \in]0, \infty[$ ein $m(\varepsilon)$, sodass $d(a, x_i) < \varepsilon$ und $d(b, x_i) < \varepsilon$ für alle $i \geq m(\varepsilon)$. Für $\varepsilon \in]0, d(a, b)[$ und $i \geq m(\varepsilon)$ ergibt sich der Widerspruch $d(a, b) \leq \max\{d(a, x_i), d(b, x_i)\} < \varepsilon < d(a, b)$. □

Definition. Die Folge (x_n) heißt *Cauchy-Folge in* (M, d), wenn

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} d(x_m, x_n) = 0$$

ist.

Definition. Der metrische Raum (M, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in (M, d) einen Grenzwert in M besitzt.

Satz 8. *Sei* (x_n) *eine Folge aus* M *mit der Eigenschaft* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. *Dann ist* (x_n) *eine Cauchy-Folge in* (M, d).

Beweis. Aus $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ folgt die Existenz eines $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon \text{ für alle } k \geq m(\varepsilon) \text{ und } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Nun wollen wir mit Induktion zeigen, dass $d(x_{m(\varepsilon)}, x_n) < \varepsilon$ für alle $n > m(\varepsilon)$ gilt. Daraus folgt dann die Cauchyfolgen-Bedingung. Der Induktionsanfang folgt aus (1). Nun sei $d(x_{m(\varepsilon)}, x_k) < \varepsilon$. Nach (1) ist auch $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$ und aus der Dreiecksungleichung folgt der Induktionsschritt

$$d(x_{m(\varepsilon)}, x_{k+1}) \leq \max\{d(x_{m(\varepsilon)}, x_k), d(x_k, x_{k+1})\} < \varepsilon.$$ □

2 Räume, deren Elemente Folgen sind

Zeichen- und Ziffernfolgen

Im Folgenden sei A eine beliebige Menge und $A^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen in A, d.h. der Folgen der Form

$$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \quad | \; a_0, a_1, a_2, \ldots \in A.$$

Wir definieren die Abbildung $d : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \to [0, \infty[$ durch $d(a, b) := 2^{-k}$, falls

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_{k-1} = b_{k-1},\ a_k \neq b_k,$$

ist. Im Falle von $a = b$ sei $d(a, b) := 0$.

Satz 9. Das Paar $(A^{\mathbb{N}}, d)$ *ist ein ultrametrischer Raum.*

Beweis. Die Eigenschaften (M1) und (M2) sind trivial. Es seien nun a, b, c Folgen aus $A^{\mathbb{N}}$, für die $d(a, b) = 2^{-k}$ und $d(b, c) = 2^{-l}$ ist. Dabei sei o.B.d.A. $l \geq k$. Ist $l > k$, so stimmen die Folgen a und c genau in den ersten genau k Stellen überein, d.h. es ist $d(a, c) = 2^{-k}$. Ist $l = k$, stimmen a und c in mindestens k Stellen überein, d.h. es ist $d(a, c) \leq 2^{-k}$. In jedem Fall sind zwei der Abstände $d(a, c), d(b, c)$ und $d(a, c)$ gleich 2^{-k} und der dritte ist höchstens gleich 2^{-k}. Daher genügt d der verschärften Dreiecksungleichung (M3′).

Satz 10. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $a_n = (a_{n,0},\ a_{n,1},\ \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$. *Die Konvergenz der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $(A^{\mathbb{N}}, d)$ *gegen den Grenzwert* $b = (b_0, b_1, \ldots)$ *ist äquivalent zur Aussage: Es gibt für jedes* $i \in \mathbb{N}$ *ein* $m(i) \in \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft* $a_{n,i} = b_i$ *für alle* $n \geq m(i)$.

Beweis.
1. Notwendigkeit: Nehmen wir an, es gäbe für ein $i \in \mathbb{N}$ beliebig hohe $n \in \mathbb{N}$ mit $a_{n,i} \neq b_i$. Dann gilt für diese n: $d(a_n, b) \geq 2^i$. Somit ist *nicht* $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0$, d.h. die Folge (a_n) konvergiert nicht gegen b. Also ist die angegebene Bedingung für die Konvergenz der Folge gegen b notwendig.
2. Hinlänglichkeit: Wir wollen zeigen, dass die Folge (a_n) gegen b konvergiert, wenn die im Satz angegebene Bedingung erfüllt ist. Sei $\varepsilon > 0$; es gelte etwa $2^{-k} \geq \varepsilon > 2^{-(k+1)}$. Für jedes i, $0 \leq i < k$, gibt es jetzt ein $m(i)$ wie in Satz 10. Sei m_k das Maximum dieser $m(i)$. Dann ist für $0 \leq i < k$ und alle $n \geq m_k$: $a_{n,i} = b_i$. Somit ist für alle $n \geq m_k$: $d(a_n, b) \leq 2^{-k} < \varepsilon$, d.h. es ist $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0$ und (a_n) konvergiert gegen b. □

Satz 11. *Der ultrametrische Raum* $(A^{\mathbb{N}}, d)$ *ist vollständig.*

Beweis. Die Beziehung $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{n>m} d(x_m, x_n) = 0$ ist dazu äquivalent, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folgen (x_n) ab einem gewissen $n_0(k)$ mindestens in den ersten k Stellen übereinstimmen. Man kann nun $x^* \in A^{\mathbb{N}}$ so wählen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Werte x_i^*, $i = 0, \ldots, k-1$, mit den ersten k Stellen der Folgen (x_n), $n \geq n_0(k)$, übereinstimmen. Dann ist $d(x^*, x_n) \leq 2^{-k}$ für $n \geq n_0(k)$, d.h. die Folge (x_n) konvergiert in $(A^{\mathbb{N}}, d)$ gegen x^*.

Satz 12. *Wenn A endlich ist, besitzt im Raum $(A^{\mathbb{N}}, d)$ jede Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $A^{\mathbb{N}}$. Wir beweisen induktiv: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Teilfolge $(a_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge (a_n), einen Index $n_k \in \mathbb{N}$ und, falls $k > 0$ ist, ein Element $a_{k-1}^* \in A$ derart, dass Folgendes gilt:

a) Es ist $a_{n,j}^{(k)} = a_j^*$ für $j = 0, \ldots, k-1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist $a_n^{(k)} = (a_{n,0}^{(k)}, a_{n,1}^{(k)} a_{n,2}^{(k)}, \ldots)$.

b) Es ist $a_0^{(k)} = a_{n_k}$ und für $k > 0$ gilt zusätzlich $n_k > n_{k-1}$.

Für $k = 0$ setzt man $(a_n^{(0)}) = (a_n)$. Die Forderung a) ist in diesem Fall leer. Die Forderung b) gilt für $n_0 = 0$. Wir nehmen nun an, die Behauptung sei für ein $k \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen. Wir wählen $a_k^* \in A$ so, dass unendlich viele der Werte $a_{n,k}^{(k)}, n \in \mathbb{N}$, gleich a_k^* sind. Weil A nur endlich viele Elemente hat, ist das möglich (Schubfachprinzip). Wir streichen in der Folge $(a_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ alle Glieder, für die $a_{n,k}^{(k)} \neq a_k^*$ ist und zusätzlich das Glied $(a_0^{(k)})$. Die entstehende Teilfolge nennen wir $(a_n^{(k+1)})$. Diese Teilfolge ist zugleich eine Teilfolge der ursprünglichen Folge; insbesondere ist $a_0^{(k+1)} = a_{n_{k+1}}$ für einen geeigneten Index n_{k+1}. Da das Glied $a_0^{(k)} = a_{n_k}$ gestrichen worden ist, muss $n_{k+1} > n_k$ sein. Folglich sind sinngemäß die Forderungen a) und b) für $k+1$ anstelle von k erfüllt, und der Induktionsbeweis ist abgeschlossen. Wir setzen nun noch $a^* := (a_0^*, a_1^*, \ldots)$. Nach Konstruktion gilt $d(a_{n_k}, a^*) \leq 2^{-k}$. Die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Ausgangsfolge (a_n) konvergiert also im Raum $(A^{\mathbb{N}}, d)$ gegen a^*. □

Räume von Zahlenfolgen

Von jetzt ab sei A einer der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Für beliebige $a = (a_0, a_1, \ldots)$ und $b = (b_0, b_1, \ldots)$ aus $A^{\mathbb{N}}$ und $c \in A$ definieren wir die Summe $a + b$ und die Produkte ca und $a \cdot b$ in $A^{\mathbb{N}}$ durch die Festlegungen

$$(a+b)_n := a_n + b_n, \quad (ca)_n := ca_n, \quad (a \cdot b)_n := \sum_{k+l=n} a_k b_l \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Für die mit den Begriffen *Vektorraum* und *Ring* vertrauten Leser erwähnen wir, dass $A^{\mathbb{N}}$ mit den ersten beiden Operationen ein Vektorraum und mit der ersten und der dritten Operation ein Ring ist. Die Folge $\mathbf{0} := (0, 0, 0, 0, \ldots)$ ist neutrales Element bezüglich der Addition und das Element $\mathbf{1} := (1, 0, 0, 0, \ldots)$ ist neutrales Element bezüglich der Multiplikation von Folgen. Wie üblich definiert man für

$a \in A^{\mathbb{N}}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Potenz a^n durch die Vorschrift $a^n := a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren), wobei ein Produkt aus 0 Faktoren gleich $\mathbf{1}$ gesetzt wird.

Man verifiziert einfach, dass d *translationsinvariant* ist, d.h., dass

$$d(a+x, b+x) = d(a, b) = d(a-b, \mathbf{0})$$

für alle $x \in A^{\mathbb{N}}$ gilt. Es ist also sinnvoll, den *Betrag* einzuführen: $|a| := d(a, \mathbf{0})$.

Bemerkung: *Der Betrag ist multiplikativ, d.h. es gilt* $|a \cdot b| = |a|\,|b|$.

Begründung. Sei $|a| = 2^{-k}$ und $|b| = 2^{-l}$. Falls $n < k+l$, so ist in jedem Summanden von $(a \cdot b)_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$ ein Faktor a_i mit $i < k$ oder b_j mit $j < l$ vorhanden. Damit ist $(a \cdot b)_n = 0$. Analog erhält man $(a \cdot b)_{k+l} = a_k b_l \neq 0$. Daraus folgt $|a \cdot b| = 2^{-(k+l)} = |a|\,|b|$.

Reihen in $A^{\mathbb{N}}$

Definition. Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, deren Glieder x_n zu $A^{\mathbb{N}}$ gehören, heißt *konvergent im Raum* $(A^{\mathbb{N}}, d)$, wenn die Folge (s_n) der durch die Vorschrift $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k$ definierten Partialsummen im Raum $(A^{\mathbb{N}}, d)$ konvergiert. Existiert der Grenzwert der Folge der Partialsummen, so nennt man ihn den *Wert* der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

Satz 13. *Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *konvergiert genau dann in* $(A^{\mathbb{N}}, d)$*, wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ *ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist trivial. Sei nun $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$. Ist $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k$, so ist (s_n) nach Satz 8 eine Cauchyfolge, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} d(s_n, s_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} |s_{n+1} - s_n| = \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Wegen der Vollständigkeit des Raums $(A^{\mathbb{N}}, d)$ (vgl. Satz 11) besitzt die Folge (s_n) als Cauchyfolge einen Grenzwert. □

Führt man die Elemente

$$e_0 = (1, 0, 0, 0, \ldots),\ e_1 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 0, 1, 0, \ldots),\ \ldots$$

ein, so lässt sich jedes Element des Folgenraumes $A^{\mathbb{N}}$ als Reihe darstellen:

$$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n,$$

denn es ist $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n e_n| \le \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$.

Bemerkung: Es ist $e_i \cdot e_j = e_{i+j}$ für $i, j \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $e_n = e_1^n$. Das legt es nahe, dem Element e_1 einen ausgezeichneten Namen zu geben. Wir schreiben von jetzt ab X anstelle von e_1. Damit ist $e_n = X^n$. Die zuvor angegebene Reihendarstellung für eine Folge $a = (a_0, a_1, \ldots)$ aus $A^{\mathbb{N}}$ kann demzufolge in der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ geschrieben werden. Sind nur endlich viele der Folgenglieder a_i von null verschieden, so kann die Reihe als endliche Summe geschrieben werden und a als ein *Polynom* in X aufgefasst werden.

Multiplikative Struktur von $A^{\mathbb{N}}$

Wir untersuchen nun die multiplikative Struktur des Ringes $\left(A^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$. Dabei werden wir Begriffe wie *Einheit* und *Primelement* ähnlich wie im Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ definieren.

Definition. Sei $a \in A^{\mathbb{N}}$. Das Element a heißt *invertierbar* oder *Einheit*, wenn es ein $b \in A^{\mathbb{N}}$ gibt, für das $a \cdot b = \mathbf{1}$ gilt. Wir nennen dann b das *inverse Element* von a und schreiben a^{-1} anstelle von b.

Satz 14. *Ein Element $a \in A^{\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Einheit, wenn $|a| = 1$ ist.*

Beweis. Es gilt zunächst $a \cdot b = \mathbf{1} \Rightarrow |a|\,|b| = 1$. Damit ist $|a| = 1$ notwendig. Im Falle $|a| = 1$ kann man das entstehende Gleichungssystem eindeutig lösen. Man erhält

$$\sum_{k+l=n} a_k b_l = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = \frac{1}{a_0} \\ b_n = -\frac{1}{a_0} \sum\limits_{\substack{k+l=n \\ k\neq 0}} a_k b_l, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Deshalb ist $|a| = 1$ auch hinreichend für die Invertierbarkeit von a.

Definition. Sei $a \neq \mathbf{0}, a \in A^{\mathbb{N}}$. Ein Element b heißt *Teiler* von a, wenn es ein $c \in A^{\mathbb{N}}$ gibt mit $a = b \cdot c$.

Bemerkung. Einheiten teilen jedes Element $a \in A^{\mathbb{N}}$.

Definition. Ein Element $p \in A^{\mathbb{N}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ heißt *Primelement* der Menge $A^{\mathbb{N}}$, wenn für jede vorgegebene Faktorzerlegung $p = a \cdot b$ gilt, dass *entweder a oder b* eine Einheit ist.

Definition. Zwei Elemente $a, b \in A^{\mathbb{N}}$ heißen *assoziiert*, wenn es eine Einheit $c \in A^{\mathbb{N}}$ gibt, für die $a = b \cdot c$ gilt.

Satz 15. *Ein Element von $A^{\mathbb{N}}$ ist genau dann Primelement, wenn es zu X assoziiert ist.*

Beweis. Aufgrund der Multiplikativität des Betrages ist ein Element $a \in A^{\mathbb{N}}$

genau dann zu X assoziiert, wenn $|a| = |X| = \frac{1}{2}$ ist. Gilt nun $|a| = \frac{1}{2}$, so folgt aus $a = b \cdot c$ stets $\frac{1}{2} = |a| = |b|\,|c|$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass genau einer der beiden Faktoren den Betrag 1 besitzt. Sei nun umgekehrt $a \in A^{\mathbb{N}}$ ein Primelement. Wäre $|a| < \frac{1}{2}$, so wäre $a = (0, 0, a_2, a_3, \ldots) = e_1 \cdot (0, a_2, a_3, \ldots)$. Wäre dagegen $|a| = 1$, so wäre $a = \mathbf{1} \cdot a$. Im ersten Fall ist *keiner* der beiden Faktoren eine Einheit und im zweiten Fall sind *beide* Faktoren eine Einheit. Beides widerspricht der Voraussetzung, dass a Primelement ist. Folglich ist $|a| = \frac{1}{2}$ die einzige Möglichkeit für den Betrag eines Primelements.

Satz 16. *Jedes $a \in A^{\mathbb{N}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ lässt sich eindeutig in der Form $a = bX^k$ schreiben, wobei $|b| = 1$ und $k \in \mathbb{N}$ ist.*

Beweis. Hat a genau k Nullen am Anfang, so gilt

$$a = X^k \cdot (a_k, a_{k+1}, \ldots) = (a_k, a_{k+1}, \ldots) \cdot X^k.$$

Wegen $a_k \neq 0$ ist diese die gesuchte Darstellung. Aus der Konstruktion folgt, dass dies auch die einzige Möglichkeit ist.

Wir schließen somit unsere Untersuchung der Ringeigenschaften von $A^{\mathbb{N}}$ ab. Es stellt sich heraus, dass es eine sehr einfache Primfaktorzerlegung für jedes Element des Folgenraumes gibt, anders als bei den ganzen Zahlen.

Differenziation von Elementen aus $A^{\mathbb{N}}$

Definition. Sei $a = (a_0, a_1, ...)$. Dann definiert man als *Ableitung* von a die Folge $a' := (a_1, 2a_2, 3a_3, ...)$; man setzt also $a'_i = (i+1)a_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Ableitung der Folge entspricht der bekannten Ableitung von Polynomen (Reihen), wobei die Folgenglieder den Koeffizienten des Polynoms entsprechen. Analog gelten die bekannten Ableitungsregeln:

Satz 17. *Für alle $a, b \in A^{\mathbb{N}}$ gilt:*

$$(a + b)' = a' + b', \quad (a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'.$$

Beweis. Für $i \in \mathbb{N}$ ist

$$(a + b)'_i = (i + 1)(a + b)_{i+1} = (i + 1)(a_{i+1} + b_{i+1}) = a'_i + b'_i,$$

$$(a \cdot b)'_i = (i + 1)(a \cdot b)_{i+1},$$

$$(a' \cdot b)_i = \sum_{k+l=i} a'_k b_l = \sum_{k+l=i} (k + 1)a_{k+1} b_l = \sum_{m+l=i+1} m a_m b_l.$$

Analog gilt $(a \cdot b')_i = \sum_{m+l=i+1} l a_m b_l$. Also ist insgesamt $(a \cdot b)'_i = (a' \cdot b)_i + (a \cdot b')_i$.

Bemerkung. Es ist

$$a' = 0 \Longleftrightarrow a = (a_0, 0, 0, \ldots) = a_0\mathbf{1},$$

$$X' = \mathbf{1}, \quad (X^n)' = nX^{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren nun spezielle Folgen, die den bekannten Funktionen exp, sin und cos entsprechen.

Definition. Seien $\exp, \sin, \cos \in A^{\mathbb{N}}$ durch die Festlegungen

$$\exp_n := \frac{1}{n!},\ \sin_n := \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{n!}, & n = 2k+1 \end{cases},\ \cos_n := \begin{cases} \frac{(-1)^k}{n!}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Satz 18. *Es gilt* $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $(\sin')' = -\sin$ und $(\cos')' = -\cos$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\exp'_n = (n+1)\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} = \exp_n$$

und

$$\sin'_n = (n+1)\sin_{n+1} = \begin{cases} (n+1)\frac{(-1)^k}{(n+1)!}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} = \cos_n .$$

Analog gilt $\cos'_n = -\sin_n$. □

Korollar. Es ist $\sin^2 + \cos^2 = \mathbf{1}$.

Beweis. Leitet man die linke Seite ab, so ist nach der Produktregel die Ableitung gleich der Nullfolge und somit $\sin^2 + \cos^2 = (a_0, 0, 0, \ldots)$ für ein $a_0 \in A$. Aus $\sin_0 = 0$ und $\cos_0 = 1$ folgt $a_0 = 1$. □

Substitution

Wir können in der Reihendarstellung einer Folge aus $A^{\mathbb{N}}$ das X durch eine andere Folge u substituieren. Wir müssen natürlich sicherstellen, dass die damit entstehende Reihe wieder konvergiert. Damit können wir eine Ableitungsregel beweisen, die der gewöhnlichen Kettenregel entspricht.

Definition. Seien $a, u \in A^{\mathbb{N}}$ und $|u| < 1$. Dann definieren wir $a \circ u := \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$. Für den Fall, dass nur endlich viele a_n von 0 verschieden sind, kann man alle $u \in A^{\mathbb{N}}$ zulassen.

Bemerkung. Es ist $a \circ X = X \circ a = a$ für jedes $a \in A^{\mathbb{N}}$.

Satz 19. *Für zwei Folgen* $a, u \in A^{\mathbb{N}}, |u| < 1$ *gilt* $(a \circ u)' = (a' \circ u) \cdot u'$.

Dem Beweis dieses Satzes stellen wir ein Lemma voran.

Lemma. *Die Differenziation ist stetig.*

Beweis. Zunächst stellt man fest, dass $|a'| \leq 2|a|$ ist, weil die Differentiation die Anzahl der Nullen am Anfang einer Folge um höchstens 1 verringert. Sei (x_n) mit $x_n \in A^{\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Dann konvergiert die Folge (x'_n) gegen $(x^*)'$, denn es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x'_n, (x^*)'\right) \leq 2 \lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, x^*\right) = 0$. □

Beweis von Satz 19. Mittels der Produktregel (vgl. Satz 17) kann man induktiv beweisen, dass die Beziehung $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ gilt. Damit ergibt sich

$$(a \circ u)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n u^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n u^{n-1} \cdot u' = (a' \circ u) \cdot u'. \quad \square$$

Mit den gegebenen Mitteln können wir ein Analogon zur Eulerschen Identität beweisen.

Bemerkung: Ist $A = \mathbb{C}$, dann gilt für $u \in A^{\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $|u| < 1$

$$\exp \circ (iu) = \cos \circ u + i \cdot \sin \circ u;$$

dabei ist natürlich $i := \sqrt{-1}$.

Begründung. Nach Definition der Substitution ist

$$\begin{aligned} \exp \circ (iu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iu)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n)!}(iu)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}(iu)^{2n+1}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, u^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, u^{2n+1} = \cos \circ u + i \sin \circ u. \end{aligned}$$